

1 Identités algébriques

🎯 **Objectif** : démontrer des identités algébriques essentielles.

📖 **Théorie** : algèbre géométrique.

🔧 **Difficulté** : ☆☆☆☆ obligatoire.

On considère un repère orthonormé fixe $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$, deux vecteurs \mathbf{u} et \mathbf{v} et le bivecteur \mathbf{B} .

- a) Montrer que le pseudoscalaire I de l'algèbre géométrique \mathbb{G}^3 est un nombre imaginaire,

$$I^2 = -1.$$

- b) Montrer que le produit extérieur entre un vecteur \mathbf{v} et un bivecteur \mathbf{B} est symétrique,

$$\mathbf{v} \wedge \mathbf{B} = \mathbf{B} \wedge \mathbf{v} = \frac{1}{2} (\mathbf{v} \mathbf{B} + \mathbf{B} \mathbf{v}).$$

Pour ce faire, orienter le repère tel que $\mathbf{B} = B_{12} \hat{e}_1 \wedge \hat{e}_2 = B_{12} \hat{e}_1 \hat{e}_2$.

- c) En déduire que le produit intérieur entre un vecteur \mathbf{v} et un bivecteur \mathbf{B} est antisymétrique,

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{B} = -\mathbf{B} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{2} (\mathbf{v} \mathbf{B} - \mathbf{B} \mathbf{v}).$$

- d) Montrer que les modules d'un vecteur \mathbf{v} , d'un bivecteur \mathbf{B} et du pseudoscalaire I s'écrivent,

$$|\mathbf{v}|^2 = \mathbf{v}^2 \quad \text{et} \quad |\mathbf{B}|^2 = -\mathbf{B}^2 \quad \text{et} \quad |I|^2 = 1.$$

2 Identités duales

🎯 **Objectif** : démontrer des identités duales essentielles.

📖 **Théorie** : algèbre géométrique.

🔧 **Difficulté** : ☆☆☆☆ obligatoire.

On considère un repère orthonormé fixe $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$, deux vecteurs \mathbf{u} et \mathbf{v} et le bivecteur \mathbf{B} .

- a) Montrer que le dual du produit intérieur entre les vecteurs \mathbf{u} et \mathbf{v} est le produit extérieur entre les vecteurs \mathbf{u} et \mathbf{v}^* ,

$$(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^* = \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}^* .$$

Pour ce faire, orienter le repère tel que $\mathbf{u} = u_1 \hat{e}_1 + u_2 \hat{e}_2$ et $\mathbf{v} = v_1 \hat{e}_1 + v_2 \hat{e}_2$.

- b) Montrer que le dual du produit extérieur entre les vecteurs \mathbf{u} et \mathbf{v} est le produit intérieur entre le vecteur \mathbf{u} et le bivecteur \mathbf{v}^* ,

$$(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v})^* = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}^* .$$

- c) Montrer que le dual du produit intérieur entre le vecteur \mathbf{v} et le bivecteur \mathbf{B} est le produit extérieur entre les vecteurs \mathbf{v} et \mathbf{B}^* ,

$$(\mathbf{v} \cdot \mathbf{B})^* = \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}^* .$$

Pour ce faire, orienter le repère tel que $\mathbf{B} = B_{12} \hat{e}_1 \wedge \hat{e}_2$.

- d) Montrer que le dual du produit extérieur entre le vecteur \mathbf{v} et le bivecteur \mathbf{B} est le produit intérieur entre les vecteurs \mathbf{v} et \mathbf{B}^* ,

$$(\mathbf{v} \wedge \mathbf{B})^* = \mathbf{v} \cdot \mathbf{B}^* .$$

- e) Montrer d'abord que les modules des produits extérieur et vectoriel entre deux vecteurs \mathbf{u} et \mathbf{v} sont les mêmes,

$$|\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}| = |\mathbf{u} \times \mathbf{v}| .$$

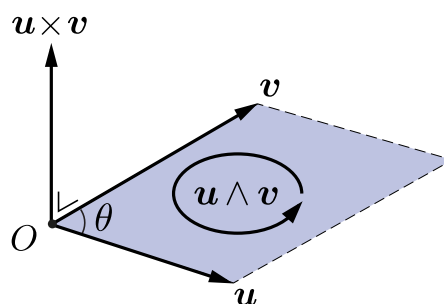


FIGURE 1 – Dualité entre le bivecteur $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ et le vecteur $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$.

3 Rotation

🎯 **Objectif** : établir les formules de rotation d'un vecteur et d'un bivecteur en termes de l'angle entre les projections de ces vecteurs dans le plan de rotation.

📖 **Théorie** : algèbre géométrique.

📌 **Difficulté** : ★★★★★ facultatif.

La rotation d'un vecteur \mathbf{v} par rapport à un axe orthogonal à un plan défini par le bivecteur unité $\hat{\mathbf{B}}$ donne le vecteur image \mathbf{v}'' ,

$$\mathbf{v}'' = R \mathbf{v} R^\dagger = e^{-\hat{\mathbf{B}}\varphi} \mathbf{v} e^{\hat{\mathbf{B}}\varphi},$$

où le rotator et son renversement sont exprimés en termes de l'angle φ par la formule d'Euler,

$$R = e^{-\hat{\mathbf{B}}\varphi} = \cos \varphi - \sin \varphi \hat{\mathbf{B}},$$

$$R^\dagger = e^{\hat{\mathbf{B}}\varphi} = \cos \varphi + \sin \varphi \hat{\mathbf{B}},$$

et $|\hat{\mathbf{B}}| = 1$. La projection $P_{\hat{\mathbf{B}}}(\mathbf{v})$ d'un vecteur \mathbf{v} sur le plan défini par le bivecteur $\hat{\mathbf{B}}$ donne le vecteur \mathbf{v}_{\parallel} et sa rejection $\bar{P}_{\hat{\mathbf{B}}}(\mathbf{v})$ orthogonalement à ce plan donne le vecteur \mathbf{v}_{\perp} (Fig. 3).

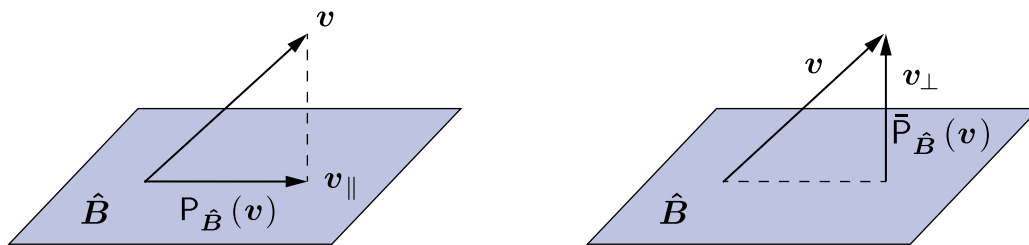


FIGURE 2 – Projection $P_{\hat{\mathbf{B}}}(\mathbf{v}) = \mathbf{v}_{\parallel}$ et rejection $\bar{P}_{\hat{\mathbf{B}}}(\mathbf{v}) = \mathbf{v}_{\perp}$ du vecteur \mathbf{v} sur le plan défini par le bivecteur unitaire $\hat{\mathbf{B}}$.

- a) Etablir les formules pour la projection et la rejection d'un vecteur \mathbf{v} par rapport au plan défini par le bivecteur unitaire $\hat{\mathbf{B}}$,

$$\mathbf{v}_{\parallel} = P_{\hat{\mathbf{B}}}(\mathbf{v}) = \hat{\mathbf{B}}^{-1} (\hat{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{v}),$$

$$\mathbf{v}_{\perp} = \bar{P}_{\hat{\mathbf{B}}}(\mathbf{v}) = \hat{\mathbf{B}}^{-1} (\hat{\mathbf{B}} \wedge \mathbf{v}).$$

- b) Par projection dans le plan défini par la bivecteur unitaire $\hat{\mathbf{B}}$, montrer que la rotation du vecteur \mathbf{v}_{\parallel} donnant le vecteur \mathbf{v}''_{\parallel} s'écrit,

$$\mathbf{v}''_{\parallel} = \mathbf{v}_{\parallel} e^{2\hat{\mathbf{B}}\varphi}.$$

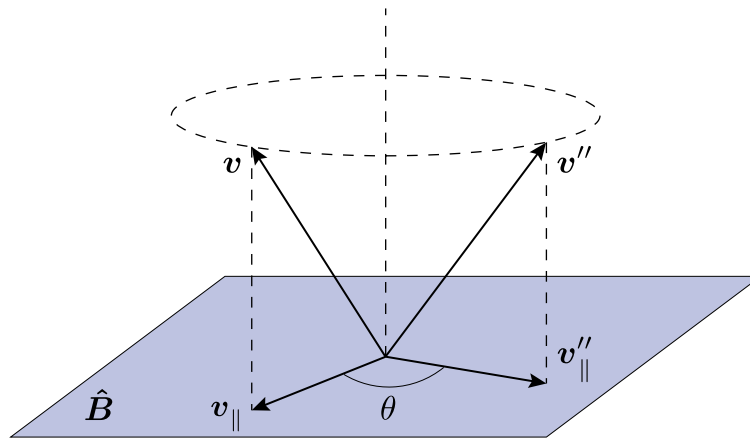


FIGURE 3 – Rotation du vecteur \mathbf{v}_{\parallel} d'un angle θ dans le plan défini par le bivecteur $\hat{\mathbf{B}}$ dont l'image est le vecteur \mathbf{v}_{\parallel}'' .

- c) Montrer que l'angle θ entre les vecteurs \mathbf{v}_{\parallel} et \mathbf{v}_{\parallel}'' vaut le double de l'angle φ dans la définition du rotor,

$$\theta = 2\varphi,$$

et en déduire la formule,

$$\mathbf{v}'' = R_{\hat{\mathbf{B}}\theta}(\mathbf{v}) = e^{-\hat{\mathbf{B}}\theta/2} \mathbf{v} e^{\hat{\mathbf{B}}\theta/2}.$$

- d) En déduire que la rotation d'un bivecteur \mathbf{A} dans le plan défini par le bivecteur unitaire $\hat{\mathbf{B}}$ s'écrit,

$$\mathbf{A}'' = e^{-\hat{\mathbf{B}}\theta/2} \mathbf{A} e^{\hat{\mathbf{B}}\theta/2}.$$

4 Rotors, quaternions et algèbre de Pauli

🎯 **Objectif** : montrer que les rotors sont des quaternions et que les vecteurs d'une base orthonormée satisfont l'algèbre de Pauli.

📖 **Théorie** : algèbre géométrique.

🔧 **Difficulté** : ★★☆☆ obligatoire.

Un bivecteur unitaire $\hat{\mathbf{B}}$ dans un plan de rotation peut être exprimé dans une base orthonormée $\{\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3\}$ comme,

$$\hat{\mathbf{B}} = B_{12} \hat{\mathbf{e}}_1 \hat{\mathbf{e}}_2 + B_{23} \hat{\mathbf{e}}_2 \hat{\mathbf{e}}_3 + B_{31} \hat{\mathbf{e}}_3 \hat{\mathbf{e}}_1.$$

- a) Montrer que le rotor R décrivant la rotation dans le plan défini par le bivecteur unitaire $\hat{\mathbf{B}}$ peut être écrit comme,

$$R = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - B_{12} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \hat{\mathbf{e}}_1 \hat{\mathbf{e}}_2 - B_{23} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \hat{\mathbf{e}}_2 \hat{\mathbf{e}}_3 - B_{31} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \hat{\mathbf{e}}_3 \hat{\mathbf{e}}_1.$$

b) Montrer que le rotor $R \in \mathbb{H}$ est un quaternion défini comme,

$$R = a + bi + cj + dk,$$

où les trois nombres imaginaires satisfont l'identité algébrique découverte par Hamilton,

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1.$$

et les coefficients satisfont l'équation cartésienne d'une hypersphère à 4D de rayon unité,

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1.$$

c) Montrer que le produit géométrique des vecteurs unités du repère orthonormé définit l'algèbre de Pauli,

$$\hat{\mathbf{e}}_i \hat{\mathbf{e}}_j = \delta_{ij} + I \varepsilon_{ijk} \hat{\mathbf{e}}_k.$$